

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

- 博客园
- 首页
- 新随笔
- 联系
- 订阅
- 管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
 欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称: 我是8位的
 园龄: 4年7个月
 粉丝: 288
 关注: 5
 +加关注

盖楼抽奖
 #她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
 分享最打动你的科技女性故事

活动时间: 2022年3月8日-3月18日

[马上参与](#)

搜索

常用链接

- 我的随笔
- 我的评论
- 我的参与
- 最新评论
- 我的标签

积分与排名

积分 - 457097
 排名 - 1198

线性代数笔记30——相似矩阵和诺尔当型

原文 | <https://mp.weixin.qq.com/s/TDj3aCEHjaKHATZ7uviQMA>

长方矩阵与正定矩阵

我们之前一直在讨论方阵，但大量的实际问题应用到了长方矩阵，比如在最小二乘中用到了 $A^T A$ 。

如果 A 是一个 $m \times n$ 的长方矩阵，那么 $A^T A$ 是一个对称矩阵，当然也是方阵，我们感兴趣的是 $A^T A$ 的正定性。对于 $A^T A$ 来说，我们对它的特征向量和行列式一无所知，需要根据 $x^T(A^T A)x > 0$ 来判断其正定性：

$$x^T(A^T A)x = (x^T A^T)(Ax) = (Ax)^T(Ax) = |Ax|^2 \geq 0$$

当且仅当 $Ax=0$ 时，上式等于0，因此只需要看看什么时候 $Ax=0$ 。

我们在矩阵零空间中讨论过，对于一个 $m \times n$ 的长方矩阵来说，如果是矩阵是列满秩， $m > n$ ，那么该矩阵的零空间只有零向量。因此，当 A 是列满秩的矩阵时，仅当 $x=0$ 时 $Ax=0$ ，此时对于任意非零向量，一定有 $x^T(A^T A)x > 0$ ， A 是正定的。

相似矩阵

A 和 B 都是 $n \times n$ 的方阵，若存在可逆矩阵 M ，使得 $B=M^{-1}AM$ ，则称 A 和 B 互为相似矩阵，记作 $A \sim B$ 。

相似矩阵与特征值

实际上我们早就见过相似矩阵。如果 A 有 n 个线性无关的特征向量，则 A 可以对角化为 $A=S\Lambda S^{-1}$ ，相当于 $S^{-1}AS=\Lambda$ ， A 和其特征值矩阵 Λ 互为相似矩阵，这里的 $M=S$ ，是特征向量矩阵。实际上 A 的相似矩阵有很多，我们可以用任意可逆矩阵 M 代替 S ，从而求得其他的相似矩阵， Λ 是众多相似矩阵中最简洁的一个。

召唤一个矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(A) = 3, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A) = 4 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3 \Rightarrow \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Λ 和 A 互为相似矩阵。如果取另一组可逆矩阵，可以得到 A 的另一个相似矩阵：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} -2 & -15 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

随笔分类 (211)

★★资源下载★★(1)
Java并发编程(1)
程序员的数学(24)
单变量微积分(31)
多变量微积分(24)
概率(24)
机器学习(27)
软件设计(1)
数据分析(6)
数据结构与算法(27)
随笔(5)
线性代数(34)
项目管理(2)
转载(4)

随笔档案 (205)

2021年2月(1)
2020年3月(2)
2020年2月(6)
2020年1月(4)
2019年12月(7)
2019年11月(15)
2019年9月(3)
2019年8月(6)
2019年7月(1)
2019年6月(8)
2019年5月(3)
2019年4月(5)
2019年3月(7)
2019年2月(3)
2019年1月(7)
更多

阅读排行榜

1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫大人

观察**B**会发现, 它的迹是4 (特征向量之和), 行列式是3 (特征向量之积), 这暗示我们**B**的特征向量和**A**相同。实际上这正是相似矩阵的特性: 相似矩阵具有同样的特征值。实际上所有特征值是3和1的二阶矩阵都是**A**的相似矩阵。

为什么相似矩阵会出现相同的特征值呢? 现在设**A**和**B**互为相似矩阵, $B = M^{-1}AM$, 根据特征方程:

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ A(MM^{-1})x &= \lambda x \\ \frac{M^{-1}AM M^{-1}x}{B} &= \lambda M^{-1}x \\ B(M^{-1}x) &= \lambda(M^{-1}x) \end{aligned}$$

现在出现了新的特征方程, **B**的特征向量是 $M^{-1}x$, 特征值是 λ , 和**A**的特征值一致。当然, 别指望特征向量也相同, 如果特征向量也相同, 就变成了完全相等的同一个矩阵。

相似矩阵的性质

对于 $B = M^{-1}AM$

设**A**, **B**和**C**是任意同阶方阵, 则有:

- (1) 反身性: $A \sim A$
- (2) 对称性: 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$
- (3) 传递性: 若 $A \sim B$, $B \sim C$, 则 $A \sim C$
- (4) 若 $A \sim B$, 则二者的特征值相同、行列式相同、秩相同、迹相同。
- (5) 若 $A \sim B$, 且**A**可逆, 则**B**也可逆, $A^{-1} \sim B^{-1}$ 。

特征值相等的情况

当**A**的所有特征值互不相同, **A**必然存在n个线性无关的特征向量, 此时**A**能够对角化; 如果存在完全相等的特征值, 是否能够对角化就不好说了, 需要另行判断, 我们对这类矩阵的相似矩阵同样感兴趣。

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

上面的对角矩阵有两个相同的特征值: $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, 如果**A**有相似矩阵, 我们看看这个相似矩阵是什么:

$$M^{-1}AM = M^{-1}4IM = 4I = A$$

此时**A**的相似矩阵是**A**本身, 类似**A**这种特征值重复的对角矩阵, 它们只和自己相似。

另一种特征值相同的矩阵则可能有很多相似矩阵, 两个特征值都是4的这类矩阵中最简洁的是:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

这个矩阵无法对角化，如果它能对角化，那么：

$$A = SAS^{-1} = S \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} S^{-1} = S(4I)S^{-1} = 4SS^{-1} = 4I$$

这显然是不成立的。类似A的矩阵虽然有完全相同的特征向量，但无法对角化，比如把右上角的元素1改成其他值。其中A是这类矩阵中最简单的一个，称为诺尔当标准型。

诺尔当标准型

诺尔当指出，对于特征值完全相同的方阵A，就算不能对角化，也一定能够通过变换得到与对角矩阵很接近的诺尔当标准型。具体来说，对于方阵A，一定有同样规模的可逆矩阵P，使得 $P^{-1}AP=J$ ，J是诺尔当标准型。

诺尔当标准型到底是个啥？举个例子：

上面的矩阵就是诺尔当标准型，其中空白区域的元素全是0，每一个红色方块是一个诺尔当块。每个诺尔当块都要满足两个性质：主对角线元素完全相同（特征值完全相同），主对角线上方的次对角线元素全为1（如果有次对角线的话）。上面的矩阵是5个诺尔当块构成的，其中[4]比较特别，它只有主对角线，没有次对角线，是大小为1的诺尔当块。

若尔当标准型是由若干个若尔当块按对角排列组成的准对角矩阵。

有时候，诺尔当标准型不是那么容易辨别。来看几个诺尔当标准型：

$$J_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad J_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

J₁和J₂比较容易：

$$J_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

J₃不是诺尔当标准型，它的次对角线是1，主对角线元素不全相等。

J₄也是诺尔当标准型，包含了三个大小为1的诺尔当块。

诺尔当标准型与相似矩阵

诺尔当告诉我们，如果一类矩阵可以化为相同的标准诺尔当型J，则这些矩阵全部是相似矩阵，都可以用 $P^{-1}JP$ 来表示。

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

A是诺尔当标准型，把右上角的元素1改成其他值，同样可以转换成A的形式，它们都是相似矩阵。

下面的一组也是相似矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B的第一个块可以很容易地通过矩阵变换转换成诺尔当块。

如果两个同阶矩阵有相同数量的诺尔当块, 但尺寸不同, 则这两个矩阵不是相似矩阵:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C由一个大小为3和1的诺尔当块构成, **D**由两个大小为2的诺尔当块构成, 虽然诺尔当块的数量相同, 但尺寸不同, 它们并不是相似矩阵。

出处: 微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主, 如需转载, 请联系本人, 标明作者和出处, 非商业用途!

扫描二维码关注作者公众号 "我是8位的"



随笔

分类: 线性代数

标签: 相似矩阵, 诺尔当标准型, 诺尔当块

好文要顶 关注我 收藏该文  

 我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288
[+加关注](#)

1 0
[推荐](#) [反对](#)

« 上一篇: [线性代数笔记29——正定矩阵和最小值](#)
» 下一篇: [线性代数笔记31——奇异值分解](#)

posted on 2019-12-03 12:49 我是8位的 阅读(1898) 评论(1) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

- 【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事
- 【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

yozodcs.com

永中DCS_文档在线预览解决方案

兼容不同版本的Office、PDF等，特定格式的合作，支持Windows、信创环境下一键部署

打开 >

编辑推荐:

- 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

活动时间: 2022年3月8日-3月18日



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes