线性代数笔记30——相似矩阵和诺尔当型

原文 | https://mp.weixin.qq.com/s/TDj3aCEHjaKHATZ7uviQMA

长方矩阵与正定矩阵

我们之前一直在讨论方阵，但大量的实际问题应用到了长方矩阵，比如在最小二乘中用到了A^TA。

如果A是一个m×n的长方矩阵，那么A^TA是一个对称矩阵，当然也是方阵，我们感兴趣的是A^TA的正定性。对于A^TA来说，我们对它的特征向量和行列式一无所知，需要根据$x^T(A^TA)x > 0$来判断其正定性：

$$x^T(A^TA)x = (x^TA^T)(Ax) = (Ax)^T(Ax) = |Ax|^2 \geq 0$$

当且仅当**Ax**=0时，上式等于0，因此只需要看看什么时候**Ax**=0。

我们在矩阵零空间中讨论过，对于一个m×n的长方矩阵来说，如果是矩阵是列满秩，m > n，那么该矩阵的零空间只有零向量。因此，当**A**是列满秩的矩阵时，仅当**x**=**0**时**Ax**=0，此时对于任意非零向量，一定有$x^T(A^TA)x > 0$，**A**是正定的。

相似矩阵

A和**B**都是n×n的方阵，若存在可逆矩阵**M**，使得$B=M^{-1}AM$，则称**A**和**B**互为相似矩阵，记作**A**~**B**。

相似矩阵与特征值

实际上我们早就见过相似矩阵。如果**A**有n个线性无关的特征向量，则**A**可以对角化为$A=S\Lambda S^{-1}$，相当于$S^{-1}AS=\Lambda$，**A**和其特征值矩阵**Λ**互为相似矩阵，这里的**M**=**S**，是特征向量矩阵。实际上**A**的相似矩阵有很多，我们可以用任意可逆矩阵**M**代替**S**，从而求得其他的相似矩阵，**Λ**是众多相似矩阵中最简洁的一个。

召唤一个矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \det(A) = 3, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A) = 4 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3 \Rightarrow \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Λ和**A**互为相似矩阵。如果取另一组可逆矩阵，可以得到**A**的另一个相似矩阵：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} -2 & -15 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

最新评论

1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

观察**B**会发现，它的迹是4（特征向量之和），行列式是3（特征向量之积），这暗示我们**B**的特征向量和**A**相同。实际上这正是相似矩阵的特性：相似矩阵具有同样的特征值。实际上所有特征是是3和1的二阶矩阵都是**A**的相似矩阵。

为什么相似矩阵会出现相同的特征值呢？现在设**A**和**B**互为相似矩阵，**B**=**M**$^{-1}$**AM**，根据特征方程：

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{-1}\right)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$
$$\underbrace{\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{x}\right) = \lambda\left(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{x}\right)$$

现在出现了新的特征方程，**B**的特征向量是**M**$^{-1}$**x**，特征值是λ，和**A**的特征值一致。当然，别指望特征向量也相同，如果特征向量也相同，就变成了完全相等的同一个矩阵。

相似矩阵的性质

对于**B**=**M**$^{-1}$**AM**

设***A***，***B***和***C***是任意同阶方阵，则有：

（1）反身性：***A***~***A***

（2）对称性：若***A***~***B***，则***B***~***A***

（3）传递性：若***A***~***B***，***B***~***C***，则***A***~***C***

（4）若***A***~***B***，则二者的特征值相同、行列式相同、秩相同、迹相同。

（5）若***A***~***B***，且***A***可逆，则***B***也可逆，***A***$^{-1}$~***B***$^{-1}$。

特征值相等的情况

当**A**的所有特征值互不相同时，**A**必然存在n个线性无关的特征向量，此时**A**能够对角化；如果存在完全相等的特征值，是否能够对角化就不好说了，需要另行判断，我们对这类矩阵的相似矩阵同样感兴趣。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

上面的对角矩阵有两个相同的特征值：$\lambda_1=\lambda_2=4$，如果**A**有相似矩阵，我们看看这个相似矩阵是什么：

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^{-1}4\boldsymbol{I}\boldsymbol{M} = 4\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}$$

此时**A**的相似矩阵是**A**本身，类似**A**这种特征值重复的对角矩阵，它们只和自己相似。

另一种特征值相同的矩阵则可能有很多相似矩阵，两个特征值都是4的这类矩阵中最简洁的是：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

这个矩阵无法对角化，如果它能对角化，那么：

$$A = S\Lambda S^{-1} = S\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}S^{-1} = S(4I)S^{-1} = 4SS^{-1} = 4I$$

这显然是不成立的。类似**A**的矩阵虽然有完全相同的特征向量，但无法对角化，比如把右上角的元素1改成其他值。其中**A**是这类矩阵中最简单的一个，称为诺尔当标准型。

诺尔当标准型

诺尔当指出，对于特征值完全相同的方阵**A**，就算不能对角化，也一定能够通过变换得到与对角矩阵很接近的诺尔当标准型。具体来说，对于方阵**A**，一定有同样规模的可逆矩阵**P**，使得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{J}$，**J**是诺尔当标准型。

诺尔当标准型到底是个啥？举个例子：

$$J = \begin{bmatrix}
2 & 1 & & & & & & & & & \\
 & 2 & 1 & & & & & & & & \\
 & & 2 & 1 & & & & & & & \\
 & & & 2 & 1 & & & & & & \\
 & & & & 2 & & & & & & \\
 & & & & & 3 & 1 & & & & \\
 & & & & & & 3 & & & & \\
 & & & & & & & 4 & & & \\
 & & & & & & & & 5 & 1 & \\
 & & & & & & & & & 5 & 1\\
 & & & & & & & & & & 5
\end{bmatrix}$$

上面的矩阵就是诺尔当标准型，其中空白区域的元素全是0，每一个红色方块是一个诺尔当块。每个诺尔当块都要满足两个性质：主对角线元素完全相同（特征值完全相同），主对角线上方的次对角线元素全为1（如果有次对角线的话）。上面的矩阵是5个诺尔当块构成的，其中[4]比较特别，它只有主对角线，没有次对角线，是大小为1的诺尔当块。

若尔当标准型是由若干个若尔当块按对角排列组成的准对角矩阵。

有时候，诺尔当标准型不是那么容易辨别。来看几个诺尔当标准型：

$$J_1 = \begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad J_2 = \begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\0 & 3 & 1\\0 & 0 & 3\end{bmatrix},\quad J_3 = \begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\0 & 3 & 1\\0 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad J_4 = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

J_1和J_2比较容易：

$$J_1 = \begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad J_2 = \begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\0 & 3 & 1\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

J_3不是诺尔当标准型，它的次对角线是1，主对角线元素不全相等。

J_4也是诺尔当标准型，包含了三个大小为1的诺尔当块。

诺尔当标准型与相似矩阵

诺尔当告诉我们，如果一类矩阵可以化为相同的标准诺尔当型**J**，则这些矩阵全部是相似矩阵，都可以用$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{JP}$来表示。

$$A = \begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}$$

A是诺尔当标准型，把右上角的元素1改成其他值，同样可以转换成**A**的形式，它们都是相似矩阵。

下面的一组也是相似矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&1&7&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

B的第一个块可以很容易地通过矩阵变换转换成诺尔当块。

如果两个同阶矩阵有相同数量的诺尔当块，但尺寸不同，则这两个矩阵不是相似矩阵：

$$C=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

C由一个大小为3和1的诺尔当块构成，D由两个大小为2的诺尔当块构成，虽然诺尔当块的数量相同，但尺寸不同，它们并不是相似矩阵。

出处：微信公众号 "我是8位的"

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”

随笔

分类: 线性代数

标签: 相似矩阵, 诺尔当标准型, 诺尔当块

编辑推荐：
· 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
· 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
· ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
· .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
· 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

最新新闻：
· 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
· 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
· 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
· Android 再推 “杀手级” 功能，可回收 60% 存储空间
· 溺在理财暴雷潮的投资人： 本金63万，月兑25元不够卖菜
» 更多新闻...